TEMA 3: DUALIDADE E ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

A análise de sensibilidade em modelos de programação linear significa simplesmente procurar uma nova interpretação a partir da solução obtida.

Já que tanto os recursos como os preços no mercado estão sujeitos a mudanças contínuas e subsequentes reavaliações, a análise Pós – Optimização é uma ferramenta dinâmica e indispensável ao administrador para avaliar as consequências das mudanças.

A análise de sensibilidade tem por objectivo verificar a validade da solução obtida quando submetida a variações nos coeficientes do modelo original.

Variação nas quantidades dos recursos

Vamos utilizar as tabelas simplex inicial e terminal do problema

Maximizar $Z = 5x_1 + 6x_2$

Sujeito à
$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \le 14 \\ 1x_1 + 1x_2 \le 9 \\ 7x_1 + 4x_2 \le 56 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

Tabela inicial simplex

Base	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x3	1	2	1	0	0	14
x4	1	1	0	1	0	9
x5	7	4	0	0	1	56
Z	-5	-6	0	0	0	0

Tabela terminal simplex

Base	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x2	0	1	1	-1	0	5
x1	1	0	-1	2	0	4
x5	0	0	3	-10	1	8
Z	0	0	1	4	0	50

Vamos supor que o recurso b_1 seja alterado de 14 para 16. Como esta mudança afectará os valores da solução original.

Tabela terminal simplex

Base	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x2	0	1	1	-1	0	5
x1	1	0	-1	2	0	4
x5	0	0	3	-10	1	8
Z	0	0	1	4	0	50

De acordo com a propriedade 2, os novos valores das variáveis básicas serão:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -10 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 16 \\ 9 \\ 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Como todos os valores são maiores ou iguais a zero, a solução actual é viável e óptima. Assim para $x_1 = 2$; $x_2 = 7$ e $x_5 = 14$ temos Z = 5x2 + 6x7 = 52, o que significa que a variação de b_1 de 14 para 16 trouxe um aumento no lucro $\Delta z = 52 – 50 = +2$ u.m.

Seja a seguinte mudança para o recurso b_1 de 14 para 20.

Tabela terminal simplex

Base	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x2	0	1	1	-1	0	5
x1	1	0	-1	2	0	4
x5	0	0	3	-10	1	8
Z	0	0	1	4	0	50

Como x_1 é negativo, esta solução não é viável, logo deve ser procurada uma outra solução óptima retirando x_1 da base.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -10 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 20 \\ 9 \\ 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 26 \end{pmatrix}$$

De um modo geral, pode-se procurar a variação permissível para cada variável nos recursos sem que a solução se torne inviável.

Intervalo óptimo de variação dos recursos

Δ^+ = limite superior – é igual ao menor quociente absoluto entre o novo valor do recurso na tabela terminal da variável que era básica na tabela inicial e os coeficientes negativos da mesma variável na tabela terminal (razões negativas).

Δ^- = limite inferior – é igual ao menor quociente absoluto entre os novos recursos óptimos e os coeficientes positivos da variável associada ao recurso b_i (razões positivas).

$$\Delta^+ = \min |\text{raz.neg}| = \min \left| \left\{ \frac{b_i}{a_{ij}} \right\} \right|; \; a_{ij} < 0$$

$$\Delta^- = \min |\text{raz.pos}| = \min \left| \left\{ \frac{b_i}{a_{ij}} \right\} \right|; \; a_{ij} > 0$$

Calcular o intervalo óptimo de oscilação de todos os recursos do exemplo anterior.

Tabela inicial simplex

Base	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x3	1	2	1	0	0	14
x4	1	1	0	1	0	9
x5	7	4	0	0	1	56
Z	-5	-6	0	0	0	0

a) b_1 está associado a $x_3 = 14$ na tabela inicial, logo vamos usar a coluna de x_3 na tabela terminal.

Tabela terminal simplex

Base	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x2	0	1	1	-1	0	5
x1	1	0	-1	2	0	4
x5	0	0	3	-10	1	8
Z	0	0	1	4	0	50

$$\Delta^+ = \min|\text{raz. neg}| = \min\left|\frac{4}{-1}\right| = 4 \uparrow$$

$$\Delta^- = \min|\text{raz. pos}| = \min\left|\frac{5}{1};\frac{8}{3}\right| = \frac{8}{3} \downarrow$$

O intervalo é:

$14 - 8/3 \le b_1 \le 14 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 34/3 \le b_1 \le 18$

Tabela inicial simplex

Base	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x3	1	2	1	0	0	14
x4	1	1	0	1	0	9
x5	7	4	0	0	1	56
Z	-5	-6	0	0	0	0

b) b_2 está associado a $x_4 = 9$ na tabela inicial, logo vamos usar a coluna de x_4 na tabela terminal.

$$\Delta^{+} = \min|\text{raz.neg}| = \min\left|\frac{5}{-1};\frac{8}{-10}\right| = \frac{4}{5}\uparrow$$

Tabela terminal simplex

Base	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x2	0	1	1	-1	0	5
x1	1	0	-1	2	0	4
x5	0	0	3	-10	1	8
Z	0	0	1	4	0	50

$$\Delta^{-} = \min|\text{raz.pos}| = \min\left|\frac{4}{2}\right| = 2\downarrow$$

O intervalo é:

$9 - 2 \leq b_2 \leq 9 + 4/5 \quad \Leftrightarrow \quad 7 \leq b_2 \leq 9.8$

Tabela inicial simplex

Base	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x3	1	2	1	0	0	14
x4	1	1	0	1	0	9
x5	7	4	0	0	1	56
Z	-5	-6	0	0	0	0

c) b_3 está associado a $x_5 = 56$ na tabela inicial, logo vamos usar a coluna de x_5 na tabela terminal.

Tabela terminal simplex

Base	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x2	0	1	1	-1	0	5
x1	1	0	-1	2	0	4
x5	0	0	3	-10	1	8
Z	0	0	1	4	0	50

$$\Delta^{+} = \min|\text{raz. neg}| = \min|\text{nao existe}| = \text{nao limitado} \uparrow$$

$$\Delta^{-} = \min|\text{raz. pos}| = \min\left|\frac{8}{1}\right| = 8 \downarrow$$

O intervalo é:

$56 - 8 \leq b_3 \leq 56 + \infty \iff 48 \leq b_3 \leq \infty$

Variação nos coeficientes da função objectivo

As variações nos coeficientes da função objectivo afectam os valores da variável z e influenciam os testes para um problema optimizado. A análise de sensibilidade deve ser feita considerando as ***variáveis básicas*** e ***não básicas***.

Variação nos coeficientes das variáveis básicas - Estes coeficientes afectam os multiplicadores do simplex que devem ser alterados antes de conferir a optimidade do problema.

Maximizar $Z = 5x_1 + 6x_2$

Sujeito à
$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 9 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 56 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Vamos supor que no exemplo 3.7, o coeficiente de x_2 tenha sido alterado de ***6 para 4***. A nova função objectivo será $Z = 5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$ e os coeficientes que nos interessam são os das variáveis $(x_2 \;\; x_1 \;\; x_5)$ ou o vector $(4 \quad 5 \quad 0)$.

Maximizar $Z = 5x_1 + 6x_2$

Sujeito à $\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \le 14 \\ 1x_1 + 1x_2 \le 9 \\ 7x_1 + 4x_2 \le 56 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$

Tabela terminal simplex

Base	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x2	0	1	1	-1	0	5
x1	1	0	-1	2	0	4
x5	0	0	3	-10	1	8
Z	0	0	1	4	0	50

Usando a propriedade 1 temos:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -10 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Base	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x2	0	1	1	-1	0	5
x1	1	0	-1	2	0	4
x5	0	0	3	-10	1	8
Z	0	0	-1	6	0	50

Base	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x2	0	1	0	7/3	-1/3	7/3
x1	1	0	0	-4/3	1/3	20/3
x3	0	0	1	-10/3	1/3	8/3
Z	0	0	0	8/3	1/3	128/3

Solução: Como todos os coeficientes da função objectivo são maiores ou iguais a zero a nova solução é: X = (20/3; 7/3; 8/3; 0; 0) com Z_{max} = 128/3. Sendo assim, a variação de c_2 de 6 para 4 diminuiu o rendimento em $\Delta_z = z_2 - z_1$ = 128/3 – 50 = - 22/3 u.m.

Variação nos coeficientes das variáveis não básicas

Δ^+ **= limite superior** – é igual ao menor quociente absoluto entre os multiplicadores do simplex da tabela terminal e os coeficientes negativos das variáveis não básicas da linha correspondente à variável básica associada ao coeficiente considerado

Δ^- **= limite inferior** – é igual ao menor quociente absoluto entre os multiplicadores do simplex da tabela terminal e os coeficientes positivos para a linha considerada (razões positivas).

$$\Delta^+ = \min|\text{raz.neg}| = \min\left|\left\{\frac{c_i}{a_{ij}}\right\}\right|; a_{ij} < 0$$

$$\Delta^- = \min|\text{raz.neg}| = \min\left|\left\{\frac{c_i}{a_{ij}}\right\}\right|; a_{ij} > 0$$

Maximizar $Z = 5x_1 + 6x_2$

Sujeito à
$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 9 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 56 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Tabela terminal simplex

Base	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x2	0	1	1	-1	0	5
x1	1	0	-1	2	0	4
x5	0	0	3	-10	1	8
Z	0	0	1	4	0	50

a) O $c_1 = 5$ ou o coeficiente de x_1 corresponde a linha 2 na tabela terminal.

$$\Delta^+ = \min |\text{raz. neg}| = \min \left|\frac{1}{-1}\right| = 1 \uparrow \qquad \Delta^- = \min |\text{raz. pos}| = \min \left|\frac{4}{2}\right| = 2 \downarrow$$

O intervalo é: $5 - 2 \leq c_1 \leq 5 + 1 \iff 3 \leq c_1 \leq 6$

Maximizar $Z = 5x_1 + 6x_2$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 9 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 56 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Tabela terminal simplex

Base	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x2	0	1	1	-1	0	5
x1	1	0	-1	2	0	4
x5	0	0	3	-10	1	8
Z	0	0	1	4	0	50

b) O $c_2 = 6$ ou coeficiente de x_2 corresponde a linha 1 na tabela terminal.

$$\Delta^+ = \min |\text{raz. neg}| = \min \left|\frac{4}{-1}\right| = 4 \uparrow \qquad \Delta^- = \min |\text{raz. pos}| = \min \left|\frac{1}{1}\right| = 1 \downarrow$$

O intervalo é: $6 - 1 \leq c_2 \leq 6 + 4 \iff 5 \leq c_2 \leq 10$

Maximizar $Z = 5x_1 + 6x_2$

Sujeito à $\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \le 14 \\ 1x_1 + 1x_2 \le 9 \\ 7x_1 + 4x_2 \le 56 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$

Tabela terminal simplex

Base	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x2	0	1	1	-1	0	5
x1	1	0	-1	2	0	4
x5	0	0	3	-10	1	8
Z	0	0	1	4	0	50

c) O $c_5 = 0$ ou coeficiente de x_5 corresponde a linha 3 na tabela terminal.

$$\Delta^+ = \min|\text{raz.neg}| = \min\left|\frac{4}{-10}\right| = \frac{2}{5}\uparrow \qquad \Delta^- = \min|\text{raz.pos}| = \min\left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}\downarrow$$

O intervalo é: $0 - 1/3 \le c_5 \le 0 + 2/5 \Leftrightarrow -1/3 \le c_5 \le 2/5$

VARIAÇÕES NOS COEFICIENTES DAS ACTIVIDADES

a) variações nos coeficientes das actividades das variáveis básicas

b) variações nos coeficientes das actividades das variáveis fora da base

ADIÇÃO DE UMA NOVA VARIÁVEL

ADIÇÃO DE UMA NOVA RESTRIÇÃO

Exercício 3.8 (página 68 – Mulenga) . Dado o problema

Maximizar $Z = 2x_1 + 1x_2$

Sujeito à
$$\begin{cases} 0x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 4x_1 + 1x_2 \leq 8 \\ 1x_1 + 0x_2 \leq 3 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

a) Resolva o problema (***Resp:*** X = (3/2; 2; 0; 0; 3/2) $Z_1 = 5$)

b) Se o recurso b_1 for mudado de 6 para 4, qual será o efeito desta mudança no lucro Z. (***Resp:*** X = (5/3; 4/3; 0; 0; 4/3) $Z_2 = 14/3$ e $\Delta z = -1/3$

c) Encontre os intervalos óptimos de oscilação de todos os recursos do problema.

(***Resp***: $0 \leq b_1 \leq 24$; $2 \leq b_2 \leq 14$; $3/2 \leq b_3 \leq$ não limitado.

SUMÁRIO

Análise de sensibilidade.

- Variação nas quantidades dos recursos
- Variação nos coeficientes da função objectivo

TPC: Página 68 à 69 (Alberto Mulenga)